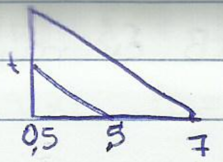
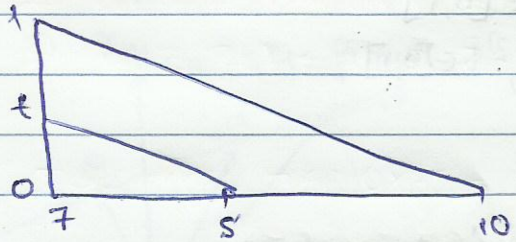



$$\frac{t-0}{1-0} = \frac{s-5}{7-5} \Rightarrow t = \frac{1}{2}(s-5)$$

Ετσι, $z(s) = (1-\frac{1}{2}(s-5))a_1 + \frac{1}{2}(s-5)a_2 \ , \ s\in[5,7]$

Για το διαστημα $[7,10]$




$$\frac{t}{1} = \frac{s-7}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{3}(s-7)$$

$$z(t) = (1-\frac{1}{3}(s-7))a_2 + \frac{1}{3}(s-7)a_3, \ s\in[7,10]$$

ομοια και για τα υπόλοιπα.

Ενας άλλος τροπος αναπαράστασης του $\varepsilon(a,b)$
Είναι ο εξής: $\forall \beta\neq 0, a\in\mathbb{C}$
$z\in\varepsilon(a,b) \Rightarrow \exists t\in\mathbb{R}: z=a+t\beta \Leftrightarrow z-a = tb \Leftrightarrow \frac{z-a}{b} = t\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow Im(\frac{z-a}{b})=0 \Rightarrow \varepsilon(a,b) = \{z : Im(\frac{z-a}{b})=0\}$
οπου εάν
- $Im(\frac{z-a}{b}) > 0 : z\in\varepsilon^+(a,b)$
- $Im(\frac{z-a}{b}) < 0 : z\in\varepsilon^-(a,b)$

ΚΥΡΤΟ ΣΥΝΟΛΟ:
Εστω $A\subseteq\mathbb{C}$ τοτε αυτό κυρτό εαν
$\forall a,b\in A: \widehat{ab} \subseteq A$
$\widehat{ab} = \{z : z=a+tb, \ t\in[0,1]\}$

Έλεγχος εαν $\mathcal{E}^+(a,b)$ και $\mathcal{E}^-(a,b)$ κυρτά:

$z_1, z_2 \in \mathcal{E}^+(a,b)$ : $Im\left(\frac{z_1-a}{\beta}\right) > 0$ και $Im\left(\frac{z_2-a}{\beta}\right) > 0$

$\overline{z_1 z_2} \subseteq \mathcal{E}^+(a,b)$

$z \in \overline{z_1 z_2}$ : $z = (1-t) z_1 + t z_2$

$$\frac{z-a}{b} = \frac{(1-t) z_1 + t z_2 - ta - (1-t)a}{b} = \frac{(1-t)(z_1-a)}{b} + \frac{t(z_2-a)}{b} > 0$$

$\rightarrow Im\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0 \Rightarrow \mathcal{E}^+(a,b)$ κυρτό ημιεπίπεδο

όμοια και για το $\mathcal{E}^-(a,b)$ (με ανάποδες ανισότητες)

Πχ

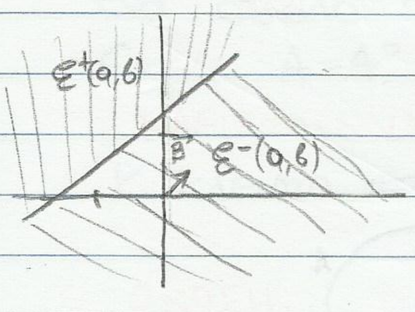
$a = -1+i$, $b = 1+i$, Να βρεθεί το $\mathcal{E}^+(a,b)$

Απ:

$\mathcal{E}^+(a,b) = \{ z : Im\left(\frac{z-a}{\beta}\right) > 0 \}$

Για $z=0 \leadsto \frac{-a}{b} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i \Rightarrow 0 \in \mathcal{E}^-(a,b)$

Γεωμετρικά (διακρίνουμε ποιο το θετικό και ποιο το αρνητικό)

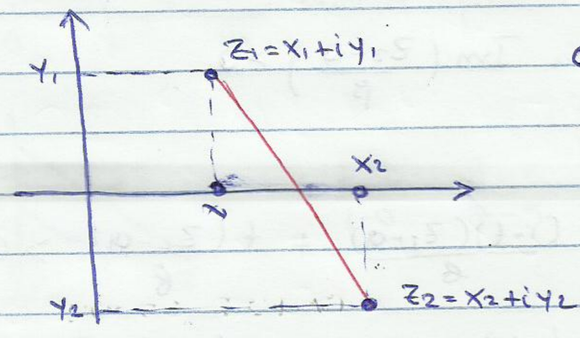



$\overline{z_1 z_2} = \{ z : \exists t \in [0,1] : z = (1-t) z_1 + t z_2 \}$ ευθ. τμήμα με αρχή το $z_1$ και τέλος το $z_2$

Ενώ, $\overline{z_1 z_2} \cup \overline{z_2 z_3} \cup \ldots \cup \overline{z_{n-1} z_n} = \overline{z_1 z_2 \ldots z_n}$ συμβολίζει την πολυγωνική γραμμή με γωνίες τα $z_1, z_2, \ldots, z_n$ αρχή το $z_1$ και τέλος το $z_n$.

# Τοπολογία στο $\mathbb{C}$

Στο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται η μετρική




$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΡΙΚΗΣ/ΣΥΝΘΗΚΕΣ:

1) $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
2) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
3) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ – ΔΙΣΚΟΙ

$$B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}, \quad r > 0$$

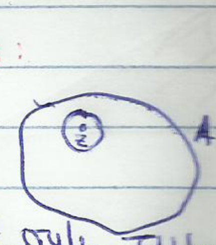
Άλλες μετρικές:

1) $d(z, w) = \dfrac{|z-w|}{1+|z-w|} < 1$

2) $d(z, w) = \min\{1, |z-w|\} \leq 1$

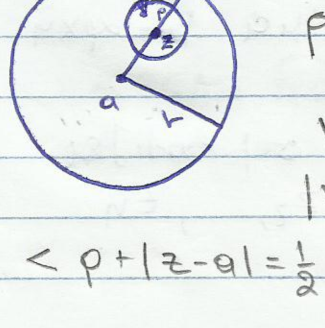
Τοπολογία Συνόλων στο Μιγαδικό επίπεδο:

$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{C} : A \text{ ανοιχτό}\}$




A ανοιχτό : $(\forall z \in A)(\exists r > 0) : B(z, r) \subseteq A$

Τυχούσα σφ. περ. είναι περ. κάθε σημ. της.




$\rho = \frac{1}{2}(r - |a - z|)$

$w \in B(z, \rho) \Rightarrow |w - z| < \rho$

$|w - a| < r$ αλλά $|w - a| \leq |w - z| + |z - a| <$

$< \rho + |z - a| = \frac{1}{2}(r - |a - z|) + |a - z| = \frac{1}{2}(r + |a - z|) < \frac{1}{2}(r + r) = r$

## Πχ

$A=\{z : |z^2-1|<1\}$ νδο $A$ ανοιχτό

**ΛΥΣΗ**

Εστω τυχόν $z\in A : |z^2-1|<1$

$w\in B(z,\rho) \Rightarrow w\in A \Rightarrow |w^2-1|<1$

$|w^2-1| = |w^2-z^2+z^2-1| \le |w^2-z^2|+|z^2-1| = |w-z||w+z|+|z^2-1|$

$< \rho(|w|+|z|)+|z^2-1| < \rho(\rho+2|z|)+|z^2-1| \overset{\rho<1}{<} \rho(1+2|z|)+|z^2-1|<1$

αρκεί $\rho < \dfrac{1-|z^2-1|}{1+2|z|}$. $A$ ανοιχτό

## ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΗΜΕΙΟΥ

$A$ περιοχή του $z \Leftrightarrow \forall z\in A : \exists\, \varepsilon>0 : B(z,\varepsilon)\subseteq A$

## ΠΥΡΗΝΑΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

$A^o=\{z : \exists \varepsilon>0 : B(z,\varepsilon)\subseteq A\}$

$A$ όχι περιοχή του $z \Leftrightarrow z\notin A$ ή $(\forall\varepsilon>0)(\exists z_0\in B(z,\varepsilon)) : z_0\notin A$

Ενα συνολο ειναι ανοιχτο εαν.ν περιοχή καθε σημειου του

Ετσι $A=A^o$ όταν $A\in \mathcal{T}$.

## ΚΛΕΙΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ

$K$ κλειστο $\Leftrightarrow K^c\in\mathcal{T}$

## ΕΝΩΣΗ

Εστω $\mathcal{C}=\{A_j : j\in J\}\subseteq\mathcal{T}$ τοτε $\cup\mathcal{C}\in\mathcal{T}$.

**Αποδ**

Εστω $z\in\cup\mathcal{T} \Rightarrow \exists A_j : z\in A_j \Rightarrow \exists\varepsilon>0 : B(z,\varepsilon)\subseteq A_j\subseteq\cup\mathcal{C}$

$\Rightarrow \cup\mathcal{C}\in\mathcal{T}$.

## ΤΟΜΗ

Έστω $\Sigma = \{K_j : j \in J\}$ τότε

$(\cap\Sigma)^c = \cup\{K_j^c : j \in J\}$ ανοιχτό σύνολο (δηλ. $\in \mathcal{J}$)

Επίσης η τομή δύο ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδ

Έστω $A_v \in \mathcal{J}$, $v = 1, 2, \dots, k$

$z \in \bigcap^{k} A_v \in \mathcal{J} \Rightarrow \forall v \in \mathbb{N} : z \in A_v \Rightarrow \exists \varepsilon_v : B(z, \varepsilon_v) \subseteq A_v, \forall v \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists (\min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} = \varepsilon > 0) : B(z, \varepsilon_0) \subseteq \cap A_v$

## ΦΡΑΓΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ

Έστω $B$ σύνολο στους μιγαδικούς

τότε $B$ φραγμένο ανν $\exists \rho > 0 : B \subseteq B(0, \rho)$

## Σχετική τοπολογία : $X \subseteq \mathbb{C}$

$\mathcal{J}_X = \{A \subseteq \mathbb{C} : \exists B \in \mathcal{J}$ με $A \cap B \subseteq X\} = \{B \cap X : B \in \mathcal{J}\}$

## ΤΟΠΟΣ

$T$ τόπος εάν:

i) $T \neq \emptyset$

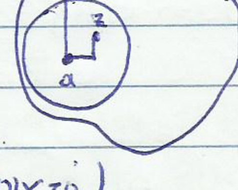
ii) $T$ ανοιχτό

iii) $T$ συνεκτικό — πολυγ. γραμμή

$\forall a, b \in T : \exists P(a, b)$ // άξονες


για $a \in T$

$Q(a) = \{z \in T : \exists P(a, z)$ // άξονες$\}$




i) $Q(a) \neq \emptyset$ | $w \in Q(a) \subseteq T$

ii) $Q(a)$ ανοιχτό ⇐ ΘΔΟ . ($Q(a)$ ανοιχτό)

$$w \in \varphi(a)^c \Rightarrow B(w, \varepsilon) \subseteq \varphi(a)^c$$